CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE **C A P E S A**

SESSION 2009

Concours : EXTERNE
Section : **Mathématiques**

DEUXIÈME ÉPREUVE ÉCRITE D'ADMISSIBILITÉ

Deuxième composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices de poche est autorisé, à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

Le sujet comporte six pages.
L'énoncé comprend deux parties.

Ce problème a pour objet l'étude de quelques propriétés des polynômes de Legendre et de Lagrange.

Dans la suite, on notera indifféremment $\frac{d^n f}{dt^n}$ ou $f^{(n)}$ la dérivée *n*-ième d'une fonction *f* et l'on acceptera l'abus de notation consistant à écrire $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ sous la forme $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$ et $f^{(n)}(t)$ sous la forme $(f(t))^{(n)}$. Par ailleurs, on notera de la même façon un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

E désigne l'espace euclidien des fonctions continues sur l'intervalle [–1 ; 1] muni du produit scalaire $(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)\ g(t)\ dt$.

Pour tout entier naturel *n*, $R_n[t]$ désigne l'ensemble formé des polynômes définis sur $\mathbb{R}$ de degré au plus égal à *n* ainsi que du polynôme nul.

Par convention, pour *k* entier naturel, on note t^k, la fonction polynôme $t \to t^k$.

Pour tout entier naturel *n*, on définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par $P_0(t) = 1$ et pour $n \geq 1$,

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\ n!}\ \frac{d^n}{dt^n}\ \left[\ \left(t^2 - 1\right)^n\ \right].$$

Partie I

1-

a. Vérifier que $P_1(t) = t$ et $P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}$.

b. Vérifier que P_n est un polynôme de degré *n*.

c. Démontrer que le coefficient dominant de P_n est égal à $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

d. Démontrer que $P_n(1) = 1$.

On rappelle la formule dite de Leibniz : si u et v sont deux fonctions de la variable t, n fois dérivables sur un intervalle I, alors pour tout t de I :

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[\ u(t)\ \ v(t)\ \right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(t)\, v^{(n-k)}(t).$$

e. Vérifier que la fonction dérivée d'une fonction paire et dérivable est impaire.

f. Étudier la parité de P_n et en déduire que $P_n(-1) = (-1)^n$.

2-

a. *k* étant un entier naturel inférieur ou égal à *n*, soit *f* une fonction de E, *k* fois dérivable et à dérivée *k*-ième continue.

Démontrer que $\left(f \mid P_n \right) = \frac{(-1)^k}{2^n \; n!} \int_{-1}^{1} f^{(k)}(t) \left[\left(t^2 - 1 \right)^n \right]^{(n-k)} dt$.

b. Démontrer que pour tous nombres entiers naturels *n* et *m* distincts, P_n et P_m sont orthogonaux.

En déduire que pour tout nombre entier naturel *m*, $\left(P_0, P_1, ..., P_m \right)$ constitue une base orthogonale de l'espace vectoriel $R_m[t]$.

c. Démontrer que pour tout nombre entier naturel *n* non nul, P_n est orthogonal aux polynômes t^k pour $0 \le k < n$.

3- Pour tout nombre entier *n* supérieur ou égal à 2, démontrer que le polynôme défini par $(2n+1)t\,P_n(t) - (n+1)P_{n+1}(t)$ est de degré inférieur ou égal *n* puis que ce polynôme est orthogonal aux polynômes t^k pour $0 \le k \le n-2$.

En déduire que ce polynôme est combinaison linéaire des polynômes P_{n-1} et P_n, puis démontrer que pour tout nombre entier *n* supérieur ou égal à 2, la suite $\left(P_n(t) \right)_{n \in N}$ vérifie la relation de récurrence $(2n+1)\,t\;\; P_n(t) = (n+1)P_{n+1}(t) + n\;\; P_{n-1}(t)$ (1).

On pourra utiliser 1-d. et 1-f.

4-

a. Démontrer que $\int_{-1}^{1} t^n \;\; P_n(t) \;\; dt = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)\;!} \;\; \left(P_n \mid P_n \right)$.

b. Démontrer que, pour tout *n* supérieur ou égal à 2, $\left(P_n \mid P_n \right) = \frac{2n-1}{2n+1} \left(P_{n-1} \mid P_{n-1} \right)$.

On pourra utiliser la relation de récurrence (1).

En déduire que, pour tout *n*, $\left(P_n \mid P_n \right) = \frac{2}{2n+1}$.

5- Soit le polynôme G_n défini par $G_n(t) = \frac{d}{dt}\left[\;\left(1-t^2\right) \;\; \frac{d}{dt}\left(P_n(t) \right) \;\right]$.

a. Préciser, pour *n* non nul, le degré du polynôme G_n et démontrer que pour $0 \le k < n$, G_n est orthogonal aux polynômes t^k. Pour $k \ne 0$, on pourra utiliser deux intégrations par parties successives et le résultat de la question 2-c.

b. Déterminer le coefficient dominant du polynôme G_n en fonction du coefficient dominant du polynôme P_n.

c. En déduire que le polynôme P_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\left(1-t^2\right)y''-2t\,y'+n(n+1)y = 0 \qquad \left(E_n\right).$$

6- Cette question a pour objet de déterminer les fonctions solutions sur [−1 ; 1] de l'équation $\left(E_n\right)$.

Pour $n \geq 1$, on appelle solution de $\left(E_n\right)$ sur]−1 ; 1[toute fonction de classe C^∞ sur cet intervalle vérifiant $\left(E_n\right)$. On note S_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de ces solutions.

a. Justifier qu'il existe deux fonctions de S_n, notées y_1 et y_2, vérifiant :

$\begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_1'(0)=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y_2(0)=0 \\ y_2'(0)=1 \end{cases}$ et formant une base de S_n.

b. On note $y(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k t^k$ une fonction développable en série entière, de rayon de convergence non nul.

i) Montrer que : $\left(y \in S_n\right) \Leftrightarrow \left(\forall k \geq 0,\ (k+2)(k+1)\alpha_{k+2}=\left[k(k+1)-n(n+1)\right]\alpha_k\right)$

ii) Montrer que , selon la parité de *n*, une des deux fonctions y_1 ou y_2 est polynomiale de degré *n* et que l'autre est développable en série entière de rayon de convergence 1.
On pourra remarquer, en donnant à k la valeur n, que $\alpha_{n+2} = 0$.

iii) En déduire que toute solution de $\left(E_n\right)$ sur]−1 ; 1[est développable en série entière

c. En notant les développements en série entière de y_1 et y_2 :

$$y_1(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\ t^{2k} \text{ et } y_2(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\ t^{2k+1}$$, montrer que :

- si *n* est pair , pour *k* > 0, $\frac{v_{k+1}}{v_k}=1-\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et en déduire la nature de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
- si *n* est impair, pour *k* > 0, $\frac{u_{k+1}}{u_k}=1-\frac{1}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et en déduire la nature de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

d. Soit *y* une fonction continue sur **[**−1 ; 1], $y \in S_n$.
Montrer que si *n* est pair , il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y=\alpha\, y_1$ et que si *n* est impair , il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $y=\beta\, y_2$.
On pourra utiliser sans justification que, selon la parité de n, la limite en 1 de y_1 *ou celle de* y_2 *est infinie.*

e. Conclure en montrant que les solutions de $\left(E_n\right)$ sur **[**−1 ; 1] forment un sous espace vectoriel de dimension 1 des fonctions de **[**−1 ; 1] dans **[**−1 ; 1] et que celui-ci est engendré par P_n.

Partie II

Cette partie est assez largement indépendante de la partie I, dont on exploitera cependant le résultat démontré à la question 2c.

1-

a. Donner un énoncé du théorème de Rolle.

b. Soit *n* et *k* deux nombres entiers naturels tel que $k < n$.

Démontrer que le polynôme *P* défini par $P(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left[\left(t^2 - 1\right)^n \right]$ admet –1 et 1 comme racines d'ordre $n-k$ et *k* racines simples distinctes deux à deux dans l'intervalle]–1 ; 1[.

c. En déduire que pour $n \geq 1$, le polynôme P_n admet *n* racines notées $a_1, a_2, ..., a_n$ telles que $-1 < a_1 < a_2 < ... < a_n < 1$.

2-

a. Vérifier que pour tout entier naturel *n* et tout réel *x* de l'intervalle [–1 ; 1], on peut prolonger par continuité la fonction $t \to \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}$ sur l'intervalle [–1 ; 1].

Pour tout entier naturel *n* et tout réel *x*, on désigne par Q_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x}\, dt .$$

b. Démontrer que pour *n* supérieur à 1, Q_n est une fonction polynôme de degré *n*–1 et que pour tout *x*, la suite $\left(Q_n(x)\right)_{n \in N}$ vérifie les conditions initiales : $Q_0(x) = 0$ et $Q_1(x) = 2$.

c. Démontrer que la suite $\left(Q_n(x)\right)_{n \in N}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $\left(P_n(x)\right)_{n \in N}$ établie à la question 3 de la partie I.

3- *n* est un nombre entier naturel non nul fixé. On note $a_1, a_2, ..., a_n$ les *n* zéros de P_n tels que $-1 < a_1 < a_2 < ... < a_n < 1$.

Pour tout nombre entier *i* compris entre 1 et *n*, soit L_i le polynôme défini par $L_i(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - a_j}{a_i - a_j}$.

a. Pour tout nombre entier *i* compris entre 1 et *n* et pour tout nombre entier *k* compris entre 1 et *n*, déterminer $L_i(a_k)$. On distinguera le cas où *k* = *i*.

b. Démontrer que $\left(L_1, ..., L_n\right)$ constitue une base de l'espace vectoriel $R_{n-1}[t]$.

c. En déduire la décomposition de tout polynôme de $R_{n-1}[t]$ dans cette base.

d. Démontrer qu'il existe une suite $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ de *n* nombres réels et une seule telle que pour tout polynôme *P* de $R_{n-1}[t]$, $\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ P(a_i)$.

e. Démontrer que pour tout polynôme *P* de $R_{2n-1}[X]$, $\int_{-1}^{1} P(t)\ dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ P(a_i)$. On effectuera la division euclidienne de *P* par P_n .

f. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 2$ puis que les λ_i sont strictement positifs.

On pourra prendre des polynômes P particuliers.

4- Q_n est le polynôme défini à la question 2.

Démontrer que pour tout nombre réel *x* strictement supérieur à 1, $Q_n(x) = P_n(x)\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x-a_i}$.

5- *n* est un nombre entier naturel non nul.

a. Démontrer que pour tout nombre réel *x* strictement supérieur à 1,

$$\int_{-1}^{1} \frac{t^{2n}-x^{2n}}{x-t}\ dt = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\ a_i^{2n}}{x-a_i} - x^{2n}\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}.$$

b. En déduire que pour tout nombre réel *x* strictement supérieur à 1,

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} - \ln\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x^{2n}}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\ a_i^{2n}}{x-a_i} - \int_{-1}^{1} \frac{t^{2n}}{x-t}\ dt\right].$$

c. α est un nombre strictement positif.

Démontrer que pour tout nombre réel *x* tel que $x \geq 1+\alpha$,

$$\left|\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} - \ln\frac{x+1}{x-1}\right| \leq \frac{3}{\alpha(1+\alpha)^{2n}}.$$

d. On pose pour tout nombre entier naturel *n* non nul , $U_n = \frac{Q_n}{P_n}$.

Démontrer que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur l'intervalle $[1+\alpha, +\infty[$.